

## Algebra im 16. und 17. Jahrhundert

### Allgemeine Lösung der Gleichung 3. Grades

circa 1500 SCIPIONE DEL FERRO (1465–1526) und  
1535 NICCOLÓ FONTANA, genannt TARTAGLIA  
(1499/1500–1557)

Lösung der Gleichung  $x^2 + px = q$

Setze  $x := \alpha - \beta$ . Wegen  $(\alpha - \beta)^2 + 2\beta(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$   
gilt dann

$$x^2 + 2\beta x = \alpha^2 - \beta^2.$$

Koeffizientenvergleich mit  $x^2 + px + q$  liefert

$$2\beta = p, \quad \alpha^2 - \beta^2 = q,$$

also

$$\beta = \frac{p}{2} \quad \text{und daher} \quad \alpha^2 = \beta^2 + q = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Letzteres kann gelöst werden durch

$$\alpha := \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

Dann ist

$$x = \alpha - \beta = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$$

Lösung.

## Lösung der Gleichung $x^3 + px = q$

Setze  $x := \alpha - \beta$ . Wegen  $(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) = \alpha^3 - \beta^3$  gilt dann

$$x^3 + 3\alpha\beta x = \alpha^3 - \beta^3.$$

Koeffizientenvergleich mit  $x^3 + px + q$  liefert

$$3\alpha\beta = p, \quad \text{also} \quad \alpha\beta = \frac{p}{3} \quad \text{und} \quad \alpha^3 - \beta^3 = q.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 &= \frac{1}{4}(\alpha^6 - 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6) + \alpha^3\beta^3 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^6 + 2\alpha^3\beta^3 + \beta^6) = \left(\frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3)\right)^2, \end{aligned}$$

also

$$\alpha^3 + \beta^3 = 2\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} = 2\sqrt{d}$$

mit  $d := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} \alpha^3 &= \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^3 - \beta^3) = \sqrt{d} + q/2, \\ \beta^3 &= \frac{1}{2}(\alpha^3 + \beta^3 - \alpha^3 + \beta^3) = \sqrt{d} - q/2. \end{aligned}$$

Also ist

$$x = \alpha - \beta = \sqrt[3]{\sqrt{d} + q/2} - \sqrt[3]{\sqrt{d} - q/2}$$

eine Lösung.

## GIROLAMO CARDANO (1501–1576)

24.9.1501: geboren in Pavia

1504–1519: in Mailand

1520–1521: Besuch der Universität Pavia

1522–1523: mathematische und medizinische Studien in Mailand

1524–1525: Besuch der Universität Padua, Rektor der Universität Padua

1526: Promotion zum Dr. med. in Padua; Arzt in Sacco

1534: Arzt am Pfrundhaus und Professor der Mathematik in Mailand

1544: Professor der Medizin in Pavia

1552: Reise nach Schottland zur Behandlung des Erzbischofs von Edinburgh

1553–1560: Arzt in Mailand

1560: Hinrichtung des ältesten Sohnes

1562: Professor der Medizin in Pavia

1563–1570: Professor in Bologna

1570: Einkerkierung wegen Unglaubens und Ketzerei

1571: Pension von Papst PIUS V., Arzt in Rom

1576: Autobiographie „De vita propria“

20.9.1576: gestorben in Rom

## „Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus“ (Nürnberg 1545)

- Lösungsformel von DEL FERRO / TARTAGLIA
- Behandlung der Fälle  $x^3 + ax^2 = c$  usw. mittels Substitutionen, etwa  $y = x + \frac{a}{3}$
- Entdeckung des „Casus irreducibilis“
- Einführung komplexer Zahlen, etwa als Lösungen

$$5 + \sqrt{-15}, \quad 5 - \sqrt{-15}$$

der Gleichung  $x(10 - x) = 40$ , Bezeichnung „quantitas sophistica“

- negative Zahlen = „falsae“ oder „fictae“ (= „falsch“ oder „fingiert“)  
positive Zahlen = „verae“ (= „wahre“)

## LUDOVICO FERRARI (1522–1565)

Lösungsverfahren für die Gleichung 4. Grades der Form  $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$  durch Einführung einer Hilfsgröße  $y$  („Resolvente“) derart, daß

$$\left(\frac{1}{4}p^2 - q + y\right)x^2 + \left(\frac{1}{2}py - r\right)x + \frac{1}{4}y^2 - s$$

zu dem Quadrat einer in  $x$  linearen Funktion wird.

## FRANÇOIS VIÈTE (lat.: VIETA) (1540–1603)

1540: geboren in Fontenay-le-Comte

1558: Jurastudium in Poitiers

1559: als Advokat in seiner Heimatstadt

1564: Rechtsberater der Familie DE PARTHENAY in Soubise

1566: Übersiedlung mit der Familie DE PARTHENAY nach La Rochelle

1570: VIÈTE in Paris, avocat au Parlement

23./24.8.1572: Bartholomäusnacht

1573: VIÈTE Rat am Parlement der Bretagne in Rennes

1580: „maître de requêtes“ am Parlement in Paris und königlicher Geheimrat

1584: aufgrund von Intrigen vom Hof verbannt

1589: Ratgeber von HEINRICH III. in Tours, auch in Diensten seines Nachfolgers HEINRICH IV. von Navarra

1593: Übertritt HEINRICH IV. zum Katholizismus

1594: VIÈTE persönlicher Berater HEINRICH IV.

1598: Edikt von Nantes: Religionsfreiheit für die Hugenotten

23.2.1603: VIÈTE in Paris gestorben

## „In artem analyticem isagoge“ (Tours 1591)

„So ist auch die Kunst, die ich nun vortrage, eine neue oder doch auch eine so alte und von Barbaren so verunstaltete, daß ich es für notwendig hielt, alle ihre Scheinbeweise zu beseitigen, damit auch nicht die geringste Unsicherheit an ihr zurückbleibe und damit sie nicht nach dem alten Moder rieche, und ihr eine vollkommen neue Form zu geben, sowie auch neue Bezeichnungen zu erfinden und einzuführen.

...

Damit diese Arbeit durch ein schematisch anzuwendendes Verfahren unterstützt wird, mögen die gegebenen Größen von den gesuchten unbekanntem durch eine feste und immer gleichbleibende und einprägsame Bezeichnungsweise unterschieden werden, wie etwa dadurch, daß man die gesuchten Größen mit dem Buchstaben *A* oder einem anderen Vokal *E, I, O, U, Y*, die gegebenen mit den Buchstaben *B, G, D* oder anderen Konsonanten bezeichnet.“

## Übersicht über die Entwicklung der Formelschreibweise

- umgangssprachlicher Name der gesuchten Größe
- spezielles Wort für die gesuchte Größe in der Aufgabenstellung, aber nicht in der Rechnung  
(Ägypten, um 1600 v. Chr.)
- Wortvariable aus der Geometrie für die gesuchte Größe, ihr Quadrat und ihren Kubus, verbal in Rechnungen verwandt  
(frühes Mesopotamien)
- . . . , aber in geometrisch nicht sinnvoller Weise benutzt  
(spätes Mesopotamien)
- Symbol für gesuchte Größe, Rechnungen verbal beschrieben  
(Griechenland, 5. Jh. v. Chr.)
- Buchstabensymbole für Parameter  
(ARISTOTELES, „Logik“, 4. Jh. v. Chr.)
- Buchstabensymbole für Parameter, Rechnungen verbal beschrieben  
(EUKLID, „Elemente“, 3. Jh. v. Chr.)

- aus der Geometrie hergeleitete Wortsymbolik für Unbekannte, Rechnungen in Abkürzungen der Worte und einiger Rechenzeichen aufgeschrieben, auch mit Parametern

(DIOPHANT, 3. Jh. n. Chr.)

- konsequente Bezeichnung der gesuchten Größe durch sinnleeres Wort („Sache“, „Ding“) und von Parametern („Seite“, „Zahl“), Rechnungen verbal beschrieben  
(Islamischer Raum, Frührenaissance)

- Buchstabensymbole für unbestimmte Größen (zunächst die Anfangsbuchstaben geometrischer Begriffe), Symbole für die Rechenoperationen  
(Renaissance)

- Systematisierung der Formelschreibweise

Großbuchstaben,

Unbekannte: Vokale,

Parameter: Konsonanten

(VIÈTE, 1591)

Kleinbuchstaben,

Unbekannte:  $x$   $y$ ,  $z$ ,

Parameter:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ...

(DESCARTES, 1637)



## Weitere mathematische Ergebnisse

- „Canon mathematicus“ (1579): Sammlung trigonometrischer Formeln und Tabellen; konsequente Verwendung von Dezimalbrüchen
- VIÈTAsche Wurzelsätze: Ausdrücke für die Koeffizienten eines Polynoms unter Verwendung der Wurzeln (bei VIÈTE strenggenommen nur im Fall positiver Wurzeln, erst in der „Invention nouvelle en l’algèbre“ (1629) von ALBERT GIRARD (1595–1632) im Allgemeinfeld)
- „De aequationum recognitione et emendatione“ (1591, gedruckt 1615) / „Supplementum geometriae“ (1593): erste Ansätze zur Lösung von Polynomgleichungen mittels trigonometrischer Funktionen, insbesondere des „Casus irreducibilis“ (erst bei GIRARD (s. o.) vollständig ausgearbeitet)
- „Zeteticorum libri quinque“ (1593): Lösung und Erklärung des Lösungsweges von bestimmten und unbestimmten Problemen
- „Variorum de rebus mathematicis responsorum“ (1593): darin in Kapitel 18 unendliches Produkt für  $\pi$ , entwickelt aus der Approximation des Kreises durch  $2^k$ -Ecke:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \dots$$

## Geometrie im 16. und 17. Jahrhundert

RENÉ DESCARTES (1596–1650)

31.3.1596: geboren in La Haye (heute: Descartes) bei  
Tours

1604–1612: Besuch des Jesuitenkollegs La Flèche in An-  
jou

1614–1616: Jurastudium in Poitiers, Baccalaureat, Li-  
zensiat

1618: freiwillig in der Armee MORITZ VON NASSAUS  
in Holland

1618–1648: Dreißigjähriger Krieg

1619: Entdeckung des „EULERSchen Polyedersatzes“  
 $e + f = k + 2$

1620: freiwillig in der Armee des Herzogs MAXIMILI-  
AN I. von Bayern, Teilnahme an der Schlacht am  
Weißen Berge

Unterricht bei JOHANNES FAULHABER (1580–  
1635) in Ulm

- 1622–1625: Reisen, unter anderem nach Italien
- 1626–1628: Aufenthalt in Paris, Freundschaft mit MARIN MERSENNE (1588–1648)
- 1628: Emigration nach Holland
- 1631: Besuch in England
- 1632: Gründung der Amsterdamer Akademie
- 1637: „Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences“, darin als Anhang und Anwendung: „La géométrie“
- 1638: Streit mit PIERRE DE FERMAT (160?–1665) über die Tangentenmethode
- 1639: GILLES DE ROBERVAL (1602–1675) bezichtigt DESCARTES des Plagiats
- Bekannschaft mit CHRISTIAAN HUYGENS (1629–1695)
- 1649: DESCARTES folgt der Einladung Königin CHRISTINES nach Schweden
- 11.2.1650: gestorben in Stockholm
- 1659–1661: zweite lateinische Ausgabe der „Géométrie“ erscheint
- 1663: DESCARTES' Schriften kommen auf den Index der katholischen Kirche

**„Discours de la Méthode pour bien  
conduire sa raison et chercher la vérité dans  
les sciences“ (Leyden 1637)**

„... daß von allen, die bis jetzt die Wahrheit in den Wissenschaften gesucht hatten, allein die Mathematiker einige Beweise, d. h. sichere und überzeugende Begründungen, hatten finden können, und so war ich überzeugt, daß ihr Gegenstand der allerleichteste gewesen sein müsse, und daß ich mithin diesen an den Anfang zu stellen hatte“.

**„La geometrie“**

„Bisher war ich bestrebt, für jedermann verständlich zu sein, aber von diesem Werke fürchte ich, daß es nur von solchen wird gelesen werden können, die sich das, was in den Büchern über Geometrie enthalten ist, angeeignet haben; denn, da diese mehrere sehr gut bewiesene Wahrheiten enthalten, so schien es mir überflüssig, solche hier zu wiederholen, ich habe es aber darum nicht unterlassen, mich ihrer zu bedienen.“

„Alle Probleme der Geometrie können leicht auf einen solchen Ausdruck gebracht werden, daß es nachher nur der Kenntnis der Länge gewisser Linien bedarf, um diese Probleme zu konstruieren.“