Mathematik im islamischen Raum

622 n. Chr.: Hedschra

634: Tod MOHAMMEDs

635: Eroberung von Damaskus

637: Eroberung Persiens

642: Eroberung von Alexandria

711: Beginn der Eroberung Spaniens

732: Schlacht bei Poitiers

773: erste Schrift mit indischen Ziffern in Bagdad, Übersetzung vom Kalifen AL-MANṢŪR in Auftrag gegeben

um 820: Übersetzung der „Elemente“ des EUKLID und von Schriften des PTOLEMAOIS durch AL-HAĞĞĀĞ

um 780–850: AL-H̱WĀRIZMĪ

um 880: Übersetzung von ARCHIMEDES-Texten durch ISḤĀQ IBN ḤUNAIN (830–910/11)

um 900: Übersetzung der „Arithmetica“ des DIOPHANT durch QUSTĀ IBN LŪQĀ (gest. 912)

1085: Reconquista von Toledo

1048–1131: ÓMAR H̱AYYĀM

1429: AL-KĀŠĪ gestorben

al-Ḫwārizmi (780–850)

= „der Choresmier“ (Landschaft südlich des Aralsees), geboren in Bagdad

– Schrift „De numero Indorum“ mit den Rechenverfahren im indisch(-arabischen) System der Zahlendarstellung

– Buch: „Al-kitab al-muḫtaṣar fi ḥisāb **al-gǎbr** wa'l-muqābala“

darin

- Erbteilungsaufgaben nach den Regeln des Korans
- Näherungswerte für π:

$$3\frac{1}{7} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{10} \quad \text{bzw.} \quad \frac{62\,832}{20\,000}$$

- geometrische Lösungsverfahren für die drei Normalformen von quadratischen Gleichungen mit positiven Koeffizienten
- dabei konsequente Bezeichnungen der unbekannten Größe:

  „šai“ („Sache“, „Ding“ $\rightsquigarrow$ „res“, „cos“) bzw.
  „ǧidr“ („Wurzel“)

  deren Quadrat: „māl“ (= „Vermögen“),
  deren dritte Potenz: „ka'b“ (= „Würfel“)

Kubische Gleichungen

- Lösung von Einzelfällen:
  - Delisches Problem: $x^3 = 2$
  - Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch AL-QŪHĪ (um 988): $x = (x-1)^2 \cdot (x+1)$
- Lösungsverfahren für alle kubischen Gleichungen (mittels Kegelschnitten) bei ’OMAR H̱AYYĀM (1048–1131)

Beispiel (in moderner Schreibweise):

$$x^3 + bx = ax^2 + c$$

mit $a, b, c > 0$, d. h.:

$$ax^2 - x^3 = bx - c$$

bzw., für $s := \frac{c}{b}$:

$$x^2(a-x) = b(x-s).$$

Multipliziere dies mit $x-s$ und setze $y^2 := (a-x)(x-s)$. Dann ist die ursprüngliche Gleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} y^2 &= (a-x)(x-s) \quad \text{(Kreis)} \quad \text{und} \\ x^2y^2 &= b(x-s)^2 \quad \text{(Hyperbel)}. \end{aligned}$$

Spezialfall $x^3 + 1 = 3x$:

- tritt auf bei der Konstruktion des regelmäßigen Neunecks,
- die Lösung liefert die Sehne zum Zentriwinkel $20°$.

  Damit verwendbar zum Aufstellen einer Sehnen-/Sinus-Tafel mit der Einteilung $1°$.

  Zeichengenauigkeit reicht für diesen Zweck nicht mehr aus!
- AL-BĪRŪNĪ (973–1048): Lösung bis auf 4 Sexagesimalstellen nach dem Komma genau; Verfahren unbekannt
- AL-KĀŠĪ (gest. 1429): Lösung durch Iteration

$$x_{n+1} := \frac{x_n^3 + 1}{3}$$

bei AL-KĀŠĪ auch Berechnung von 2π mittels des $3 \cdot 2^{28}$-Ecks zunächst sexagesimal zu

$$6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 14, 50$$

(Fehler: weniger als ein Viertel der letzten Stelle), dezimal umgerechnet zu

$$6,2831853071795865$$

Trigonometrische Funktionen

- vermutlich schon bei Hipparch (um 141 bis 126 v. Chr.) Sehnentafeln

  Verwendung als Hilfsmittel für astronomische Rechnungen

  definitiv bei Klaudios Ptolemaios (circa 100–170 n. Chr.)

- Bezeichnet $S(\alpha)$ die Sehne zum Zentriwinkel α und r den Kreisradius, dann gilt

$$S(\alpha) = r \sin(\tfrac{1}{2}\alpha).$$

- Übergang von den Sehnen zum Sinus in Indien, etwa bei Āryabhaṭa (476 – nach 498 n. Chr.)

Berechnungsverfahren für (Sehnen-/)Sinus-Tafeln

- elementargeometrisch bekannt und mit Zirkel und Lineal zu konstruieren:

  $\sin 30° = \frac{1}{2}$ (gleichseitiges Dreieck)
  $\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck)

- Rechenregeln für Sehnen bzw. Sinus:

  ARCHIMEDES (?)

  $$\sin(\frac{1}{2}\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

  PTOLEMAIOS

  $$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta} \\ &\quad \pm \sin\beta\sqrt{1-\sin^2\alpha}\end{aligned}$$

– damit Sinus-Tafel mit der Schrittweite $15°$ bzw. $7\frac{1}{2}°$ bzw. $3\frac{3}{4}°$ (HIPPARCH (?), ĀRYABHAṬA), ... möglich

– selbst bei Verwendung der Tatsache, dass

  $\sin(36°)$ bekannt (regelmäßiges Fünfeck)

  nur Reduktion der Schrittweite auf $3°$ bzw. $1\frac{1}{2}°$ bzw. $\frac{3}{4}°$, ... möglich

– falls Sehne zu $20°$, d. h., $\sin 10°$ bekannt, auch Tafel mit Schrittweite $1°$ bzw. $\frac{1}{2}°$ bzw. $\frac{1}{4}°$, ... möglich

Mathematik im europäischen Mittelalter

„Propositiones ad acuendos juvenes“

herausgegeben von Alcuin von York (735–804): 53/56 Aufgaben aus der mathematischen Tradition

- Vom Spaziergänger: Ein Mann geht spazieren und trifft andere Menschen, die ihm entgegenkommen. Er sagt: wenn ihr noch einmal soviel wäret, wie ihr seid, und dazu die Hälfte der Hälfte und davon noch einmal die Hälfte, dann wäret ihr mit mir zusammen 100.

  Lösung: 36. Das Doppelte ist 72, davon die Hälfte der Hälfte ist 18, davon die Hälfte ist 9; dazu 1, ergibt 100.

- Vom Bischof, der 12 Brote an den Klerus verteilen läßt. Ein Bischof läßt 12 Brote an 12 Kleriker verteilen, und zwar erhält jeder Presbyter 2 Brote, jeder Diakon 1/2 Brot und jeder Lektor 1/4 Brot. Wieviele Presbyter, Diakone und Lektoren sind es?

  Lösung: 5 Presbyter, 1 Diakon, 6 Lektoren

- Kreisberechnungen mit grober Näherung (3) für π
- „Denksportaufgaben“, wie „Vom Wolf, von der Ziege und dem Kohlkopf“
- ...

Leonardo Pisano = Fibonacci

1170/80: geboren

seit 1192: in Bugia (Algerien)

Reisen nach Ägypten, Syrien, Byzanz, Sizilien und in die Provence

um 1200: Rückkehr nach Pisa

1202: „Liber abbaci“

1220: „Pratica geometriae“

1225: Friedrich II. von Hohenstaufen in Pisa vorgestellt

„Flos“

1240: jährliche Bezüge von der Republik Pisa

„Liber abbaci" (1202)

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Kaufleute:

- Rechnen mit indisch-arabischen Zahlendarstellungen,
- nach dem Vorbild der Mathematiker der islamischen Welt eine feste Bezeichung für die Unbekannte („res")
- irrationale Zahlen als Koeffizienten zugelassen,
- Buchstaben als Zeichen für beliebige Zahlen benutzt,
- im Gegensatz zu den Mathematikern der islamischen Welt gelegentlich negative Lösungen zugelassen (= Schulden),
- Behandlung linearer Gleichungssysteme in mehreren Unbestimmten,
- Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen,
- „Fibonacci-Zahlen": Anzahl der Kaninchen-Paare, die aus einem Paar hervorgehen, wobei vorausgesetzt wird, dass jedes geschlechtsreife Paar jeden Monat ein Paar Junge erzeugt und dass Kaninchen nach einem Monat geschlechtsreif werden:

  $$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

  bzw.:

  $$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

„Pratica geometriae“ (1220)

- Flächeninhaltsbestimmungen, Näherungswert für π:

$$\frac{864}{275} \approx 3,14182$$

- Sehnenrechnung des Ptolemaios

„Flos“ (= die Blume) (1225)

Lösung ihm gestellter Aufgaben, insbesondere der kubischen Gleichung

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Beweis, dass Lösung nicht sein kann: ganz, rational, Quadratwurzel einer rationalen Zahl
Angabe einer Näherungslösung mit 6 Sexagesimalstellen nach dem Komma

„Deutsche Coß“

erste Vorkommen der heute üblichen Rechenzeichen:

$+, -$	Johannes Widmann handschriftlich: um 1486 gedruckt: 1489
$\cdot$	1480–1490 Prag 1504 Augsburg 1540 Johann Albert (Stadtarchiv Dortmund)
Bruchstrich	arabische Texte des 12. und 13. Jhrds.; 1202 im „Liber abaci“ des Leonardo Pisano
:	Mitte des 17. Jhrds.
/	1866
$=$	1577 Robert Recorde
$\sqrt{\ }$	um 1520